Arch. Math. 80 (2003) 79–86
0003–889X/03/010079–08

Archiv der Mathematik

Les multihérissons et le théorème de Sturm-Hurwitz

Par

YVES MARTINEZ-MAURE

Abstract. In n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$, an N-hedgehog is the envelope of a family of cooriented hyperplanes including exactly N hyperplanes with given unit normal vector. Hedgehogs (or 1-hedgehogs) with C ^{2} support function can be interpreted as differences of convex bodies of class C^2_+. We studied in [5] the extension to hedgehogs of classical geometrical inequalities for convex bodies. On some spaces of hedgehogs, the Aleksandrov-Fenchel inequality is reversed and an inner product is defined in terms of mixed volume [5]. This paper gives a similar study for N -hedgehogs in $\mathbb{R}^2(N \in \mathbb{N}^*)$. We give a geometrical interpretation of the Sturm-Hurwitz theorem and a new proof of this theorem for C^2-functions. We also consider the Minkowski problem for N-hedgehogs.

1. Introduction. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour toute fonction $2N\pi$-périodique $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, nous considérons dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$, l'enveloppe de la famille de droites d'équation

(1) $$\langle x, u(\theta)\rangle = h(\theta),$$

où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire canonique et $u(\theta)$ le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$. Cette enveloppe est appelée le N -hérisson de fonction support h et notée $\mathcal{H}_h$. La dérivation partielle de (1) par rapport à θ nous donne

(2) $$\langle x, u'(\theta)\rangle = h'(\theta),$$

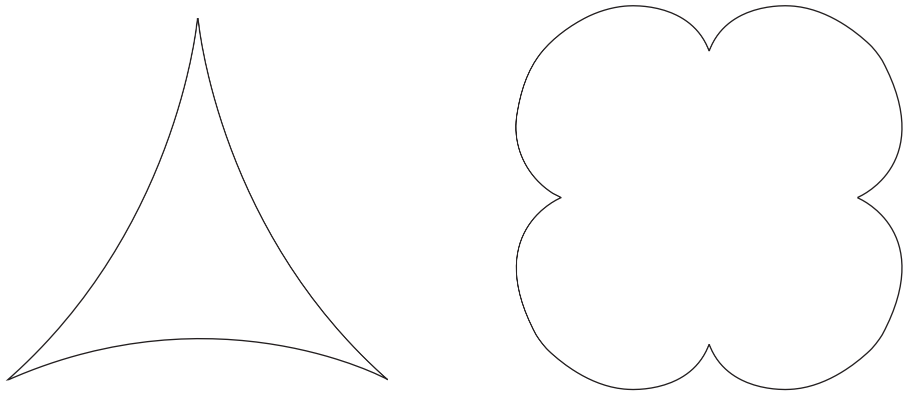
et l'on déduit de (1) et (2) la paramétrisation naturelle de $\mathcal{H}_h$:

$$x_h : [0, 2\pi N] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \theta \mapsto x_h(\theta) = h(\theta)u(\theta) + h'(\theta)u'(\theta).$$

Naturellement, lorsqu'elle existe, la tangente de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(\theta)$ est la droite support d'équation (1) (i.e. de vecteur normal $u(\theta)$ et de distance signée à l'origine $h(\theta)$). Les hérissons (1-hérissons) réguliers de $\mathbb{R}^2$ sont les courbes convexes de classe C^2_+ (de fonction support C^2 et de courbure > 0) et tout hérisson de $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme une différence de tels corps convexes. On peut bien sûr définir des N-hérissons de fonction support seulement C^1, mais ces N-hérissons peuvent être fractals et ne pas représenter des différences de

---

Mathematics Subject Classification (2000): 52A30, 52A38, 52A40, 42A05, 42A99.



L'hypocycloïde $\mathcal{H}_{h_3}$ L'épicycloïde $\mathcal{H}_{e_3}$

Figure 1.

corps convexes [6, 8]. Les N -hérissons de $\mathbb{R}^2$ ont exactement N droites support de vecteur normal donné. En voici des exemples: pour tout $n \geqq 2$, l'hypocycloïde (resp. l'épicycloïde) de fonction support $h_n(\theta) = \sin(n\theta)$ (resp. $e_n(\theta) = \sin((n-1)\,\theta/n\theta))$ est un hérisson (resp. un n-hérisson) à $2n$ (resp. $2(n-1)$) rebroussements (cf. Fig. 1); lorsque n est impair, les rebroussements de l'hypocycloïde sont comptés deux fois car $x_{h_n}(\theta)$ parcourt deux fois $\mathcal{H}_{h_n}$ lorsque θ décrit le segment $[0, 2\pi N]$.

L'aire (algébrique) d'un N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ est définie par

$$a(h) = \frac{1}{2}\int_0^{2N\pi} h(\theta)(h+h'')(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2N\pi} (h^2-(h')^2)(\theta)d\theta;$$

elle s'interprète comme l'intégrale sur $\mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$ de l'indice $i_h(x)$ que l'on définit comme le nombre algébrique d'intersection d'une demi-droite orientée d'origine x avec le N-hérisson $\mathcal{H}_h$ muni de son orientation transverse (nombre indépendant de la demi-droite orientée pour un ouvert dense de directions):

$$a(h) = \int_{\mathbb{R}^2-\mathcal{H}_h} i_h(x)\, d\lambda\,(x),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour l'hypocycloïde $h_3(\theta) = \sin(3\theta)$ (resp. l'épicycloïde $e_3(\theta) = \sin(2\theta/3)$), l'aire est égale à -4π (resp. $(5/6)\pi$); $a(h_3)$ s'écrit $-2\,aire(D)$, où D désigne le compact délimité par $\mathcal{H}_{h_3}$ (le facteur -2 vient du fait que $x_{h_3}(\theta)$ parcourt deux fois $\mathcal{H}_{h_3}$ dans le sens indirect lorsque θ décrit le segment $[0, 2\pi]$ de 0 à 2π). Cette aire (algébrique) définit une forme quadratique sur l'espace vectoriel des N-hérissons de $\mathbb{R}^2$. Sa forme polaire $a(h,k)$ s'interprète comme l'aire (algébrique) mixte des N-hérissons $\mathcal{H}_h$ et $\mathcal{H}_k$:

$$a(h,k) = \frac{1}{2}\int_0^{2N\pi} h(\theta)\,(k+k'')(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2N\pi} (hk - h'k')(\theta)\,d\theta.$$

La longueur (algébrique) d'un N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ est définie par

$$l(h) = 2a(1,h) = \int_0^{2N\pi} (h+h'')(\theta)d\theta = \int_0^{2N\pi} h(\theta)\,d\theta,$$

alors que son aire absolue est donnée par

$$L(h) = \int_0^{2N\pi} |(h+h'')(\theta)|d\theta,$$

puisque:

$$\forall\theta \in [0, 2N\pi]\,,\, x_h'(\theta) = (h+h'')(\theta)u'(\theta).$$

Les singularités de $\mathcal{H}_h$ correspondent aux zéros de la fonction dite de courbure $R_h(\theta) = (h+h'')(\theta)$ (rayon de courbure principal en $u(\theta)$). Génériquement, $R_h'(\theta) \neq 0$ lorsque $R_h(\theta) = 0$, et les singularités de $\mathcal{H}_h$ sont des rebroussements de première espèce. Le N-hérisson $\mathcal{H}_h$ est réduit à un point si, et seulement si, $h(\theta)$ est de la forme $a\cos\theta + b\sin\theta$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; l'additionner à un N-hérisson $\mathcal{H}_k$ revient alors à translater celui-ci de (a,b). Une théorie de Brunn-Minkowski peut être développée pour les N-hérissons de $\mathbb{R}^2$:

Théorème 1. *Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ un N-hérisson pour lequel $h(N\theta)$ est un polynôme trigonométrique de degré $\leqq N$. L'application $i_h : \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h \to \mathbb{Z}$ est $\geqq 0$ et n'est identiquement nulle que si $\mathcal{H}_h$ est un point. L'aire mixte est donc un produit scalaire sur l'espace vectoriel P_N des N-hérissons de cette forme définis à translation près (l'harmonique d'ordre N de $h(N\theta)$ n'est pas spécifiée), et: $\forall (h,k) \in P_N^2$,*

$$\sqrt{a(h+k)} \leqq \sqrt{a(h)} + \sqrt{a(k)} \tag{3}$$

et

$$a(h,k)^2 \leqq a(h)\,a(k), \tag{4}$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{H}_h$ et $\mathcal{H}_k$ sont linéairement dépendants dans P_N.

L'inégalité (3) (resp. (4)) est de type Brunn-Minkowski (resp. Minkowski), mais le sens de l'inégalité est inversé par rapport à l'inégalité traditionnelle pour les convexes [10]. En particulier, (4) donne une inégalité isopérimétrique inversée pour $k = 1$:

$$a(h) \geqq \frac{1}{4N\pi} l(h)^2, \tag{5}$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{H}_h$ est un cercle parcouru N fois.

Dans le résultat suivant, nous remplaçons l'aire mixte par son opposé:

Théorème 2. *Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ un N-hérisson pour lequel les harmoniques non nulles du développement de Fourier de $h(N\theta)$ sont toutes d'ordre $\geqq N$, i.e. $h(N\theta) = \sum_{n \geqq N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. L'application $i_h : \mathbb{R}^2\text{-}\mathcal{H}_h \to \mathbb{Z}$ est $\leqq 0$ et n'est identiquement nulle que si $\mathcal{H}_h$ est un point. L'opposé de l'aire mixte est donc un produit scalaire sur l'espace vectoriel E_N des N-hérissons de cette forme définis à translation près (l'harmonique d'ordre N de $h(N\theta)$ n'est pas spécifiée), et: $\forall (h,k) \in E_N^2$,*

$$\sqrt{-a(h+k)} \leqq \sqrt{-a(h)} + \sqrt{-a(k)} \tag{6}$$

$$a(h,k)^2 \leqq a(h)\,a(k), \tag{7}$$

avec égalité si, et seulement si, $\mathcal{H}_h$ et $\mathcal{H}_k$ sont linéairement dépendants dans E_N.

La seconde partie des théorèmes 1 et 2 découle simplement de l'expression de l'aire en fonction des harmoniques de $h(N\theta) = \sum_{n \geqq 0} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$:

$$a(h) = N a_0^2 \pi + \frac{\pi}{2N} \sum_{n=1}^{+\infty} (N^2 - n^2)\,(a_n^2 + b_n^2).$$

Mais ces énoncés peuvent être vus globalement comme des corollaires du résultat suivant (dont le cas $N = 1$ a déjà été établi dans [7]):

Théorème 3. *Pour tout N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$, nous avons:*

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h,\ i_h(x) = N - \tfrac{1}{2} n_h(x), \tag{8}$$

où $n_h(x)$ désigne le nombre de droites support coorientées de $\mathcal{H}_h$ passant par x, c'est-à-dire le nombre de zéros de $h_x : [0, 2N\pi[\to \mathbb{R}, \theta \longmapsto h(\theta) - \langle x, u(\theta)\rangle$. Notons que (8) *permet de définir $i_h(x) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.*

En effet: (i) le Théorème 1 est une conséquence directe de ce résultat sachant qu'un polynôme trigonométrique de degré $\leqq N$ a au plus $2N$ zéros dans $[0, 2\pi[$; (ii) le Théorème 2 en est également une conséquence immédiate compte tenu du théorème de Sturm-Hurwitz:

Théorème de Sturm-Hurwitz. *Toute fonction continue développable en série de Fourier $h(\theta) = \sum_{n \geqq N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ a au moins autant de zéros que sa première harmonique non nulle:*

$$\operatorname{Card}(\{\theta \in [0, 2\pi[\mid h(\theta) = 0\}) \geqq 2N.$$

Notons que le Théorème 2 permet d'interpréter géométriquement le théorème de Sturm-Hurwitz pour les fonctions C^2 (la théorie s'étend partiellement à des N-hérissons plus généraux [6]) : pour tout N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ de fonction support

$$h(\theta) = \sum_{n \geqq N} \left(a_n \cos \tfrac{n\theta}{N} + b_n \sin \tfrac{n\theta}{N}\right),$$

la totalité de l'aire est négative (i.e. $i_h \leqq 0$). Dans la Section 2, nous donnons une preuve géométrique directe du Théorème 2, et par conséquent *une preuve géométrique du théorème de Sturm-Hurwitz pour les fonctions* C^2. Pour l'histoire et l'importance du théorème de Sturm-Hurwitz, nous renvoyons le lecteur aux articles de V. I. Arnold et en particulier à [1]. Dans cet article, V. I. Arnold nous explique pourquoi l'on peut considérer la théorie de Sturm comme une théorie de Morse étendue aux dérivées d'ordre supérieur et déplore: ⟨⟨ There are many proofs of this theorem but all of them are incomprehensible. Of course, I can reproduce them but you get no intuition from those proofs ⟩⟩.

Espérons que cette nouvelle preuve contribue un peu à combler cette lacune. Rappelons que le théorème de Sturm-Hurwitz n'a toujours pas d'équivalent en dimension supérieure [1]. Je tiens à remercier chaleureusement Mauricio Garay pour m'avoir sensibilisé avec enthousiasme à l'intérêt de la théorie de Sturm.

2. Preuve des résultats et compléments. Preuve du Théorème 3. L'indice $i_h(x)$ peut être défini comme le degré de l'application

$$f_x : S_N \to \mathbb{S}^1, \theta \longmapsto \frac{x_h(\theta) - x}{\|x_h(\theta) - x\|},$$

où $S_N = \mathbb{R}/2N\pi\mathbb{Z}$. Sachant que $x_h(\theta) - x = x_{h_x}(\theta)$, où $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta)\rangle$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x = 0_{\mathbb{R}^2}$. Comme nous avons

$$(f_{0_{\mathbb{R}^2}})'(\theta) = \frac{h(\theta) R_h(\theta)}{\|x_h(\theta)\|^2}\, T_h(\theta),$$

où $T_h(\theta)$ forme avec $X_h(\theta) = x_h(\theta)/\|x_h(\theta)\|$ une base orthonormée directe $(X_h(\theta), T_h(\theta))$ de $\mathbb{R}^2$, il apparaît que

$$\begin{aligned} i_h(0_{\mathbb{R}^2}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2N\pi} \frac{h(\theta)(h + h'')(\theta)}{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta \\ &= N + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2N\pi} \frac{h(\theta)h''(\theta) - h'(\theta)^2}{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta. \end{aligned}$$

En d'autres termes, nous avons

$$i_h(0_{\mathbb{R}^2}) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \omega,$$

où Γ_h est l'arc orienté paramétré par $\gamma_h : [0, 2N\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\theta \longmapsto (h(\theta), h'(\theta))$ et ω la 1-forme différentielle

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} \text{ pour tout } (x_1, x_2) \neq (0, 0).$$

Or, $\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \omega$ est l'indice de l'origine par rapport à Γ_h, i.e. le nombre algébrique de tours que fait Γ_h autour de $0_{\mathbb{R}^2}$ (nombre positif si Γ_h tourne dans le sens direct et négatif dans le cas contraire). Comme l'abscisse de $\gamma_h(\theta)$ croît (resp. décroît) strictement lorsque l'ordonnée de $\gamma_h(\theta)$ est > 0 (resp. < 0), ce nombre est donné par l'opposé de $\frac{1}{2} n_h(0_{\mathbb{R}^2})$ et nous avons donc bien

$$i_h(0_{\mathbb{R}^2}) = N - \tfrac{1}{2} n_h(0_{\mathbb{R}^2}). \quad \square$$

Définition. Pour tout N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$, nous appellerons aire positive (resp. négative) de $\mathcal{H}_h$, l'intégrale

$$a_+(h) = \int_{P_h} i_h(x) d\lambda(x) \quad \left(\text{resp. } a_-(h) = \int_{N_h} |i_h(x)| d\lambda(x)\right),$$

où P_h (resp. N_h) est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $i_h(x) > 0$ (resp. < 0).

Notre preuve du Théorème 2 (et donc du théorème de Sturm-Hurwitz) repose sur la proposition suivante:

Proposition 1. *Soit $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ un N-hérisson de fonction support C^3. La développée (i.e. le lieu des centres de courbure) de $\mathcal{H}_h$ est le N-hérisson de fonction support $(\partial h)(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$, il vérifie $n_h(x) \leqq n_{\partial h}(x)$, et donc $i_h(x) \geqq i_{\partial h}(x)$ d'après le Théorème 3, de sorte que:*

(9) $$P_{\partial h} \subset P_h \text{ et } N_{\partial h} \supset N_h;$$

(10) $$a_+(\partial h) \leqq a_+(h) \quad \text{et} \quad a_-(\partial h) \geqq a_-(h).$$

Preuve. En effet, le centre de courbure de $\mathcal{H}_h$ est donné en $x_h(\theta)$ par $c_h(\theta) = x_h(\theta) - R_h(\theta) u(\theta)$, de sorte que $c_h(\theta - \frac{\pi}{2}) = x_{\partial h}(\theta)$. Par ailleurs, deux zéros de $h_x(\theta) = h(\theta) - \langle x, u(\theta)\rangle$ étant toujours séparés par un zéro de $h_x'(\theta) = h'(\theta) - \langle x, u'(\theta)\rangle = (\partial h)(\theta + \frac{\pi}{2}) - \langle x, u(\theta + \frac{\theta}{2})\rangle = (\partial h)_x(\theta + \frac{\pi}{2})$, on a $n_h(x) \leqq n_{\partial h}(x)$. $\square$

Preuve du Théorème 2 (et donc du théorème de Sturm-Hurwitz pour les fonctions C^2). Notons ∂^{-1} l'endomorphisme de E_N qui associe, à tout N-hérisson $h(\theta) = \sum_{n \geqq N} (a_n \cos \frac{n\theta}{N} + b_n \sin \frac{n\theta}{N})$, sa développante de longueur algébrique nulle $(\partial^{-1} h)(\theta) = \sum_{n \geqq N} \frac{N}{n} (a_n \sin \frac{n}{N}(\theta + \frac{\pi}{2}) - b_n \cos \frac{n}{N}(\theta + \frac{\pi}{2}))$. Naturellement $\partial(\partial^{-1} h) = h$.

Pour tout $h(\theta) = \sum\limits_{n \geqq N} (a_n \cos \frac{n\theta}{N} + b_n \sin \frac{n\theta}{N})$, considérons la suite récurrente de E_N définie par:

$$h_0 = h \quad \text{et} \quad (\forall n \geqq 1, h_n = \partial^{-1} h_{n-1}).$$

Comme (P_{h_n}) croît d'après (9), il suffit de noter que $(\mathcal{H}_{h_n})_{n \geqq 1}$ converge pour la distance de Hausdorff vers $\{(a_N, b_N)\} = \mathcal{H}_{h_\infty}$, où $h_\infty(\theta) = a_N \cos\theta + b_N \sin\theta$, pour s'assurer que $P_h = \emptyset$ (i.e. que $\mathcal{H}_h$ ne présente que de l'aire négative). En d'autres termes, il suffit de noter que $\|x_{h_n}(\theta) - (a_N, b_N)\| = \|x_{(h_n - h_\infty)}(\theta)\|$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on établit la majoration

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|x_{(h_n - h_\infty)}(\theta)\| \leqq 2M \left(\frac{N}{N+1}\right)^{n-1},$$

où $M = \sum\limits_{k \geqq N+1} (|a_k| + |b_k|)$, en partant du développement

$$(h_n - h_\infty)(\theta) = \sum_{k \geqq N+1} \left(\frac{N}{k}\right)^n (a_k \cos\theta_{n,k} + b_k \sin\theta_{n,k}),$$

où $\theta_{n,k} = \frac{k}{N}(\theta + n\frac{\pi}{2}) - n\frac{\pi}{2}$, et en notant que $a_k, b_k = O(\frac{1}{k^2})$ puisque h est C^2. $\square$

Naturellement, le problème de Minkowski (i.e. de la courbure prescrite pour les corps convexes) s'étend aux N-hérissons: quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire une fonction $2N\pi$-périodique $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour assurer l'existence (et l'unicité à translation près) d'un N-hérisson de fonction de courbure R ? L'invariance de l'aire algébrique par translation donne la condition nécessaire

$$\int_0^{2N\pi} R(\theta) u(\theta) d\theta = 0, \tag{11}$$

où $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. On vérifie sans aucune difficulté que si $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et $2N\pi$-périodique vérifiant (11), alors R est la fonction de courbure du N-hérisson de fonction support

$$h(\theta) = \int_0^\theta R(\alpha) \sin(\theta - \alpha) d\alpha,$$

et de tous ses translatés (et de nul autre N-hérisson). La condition (11) assure ici la $2N\pi$-périodicité de la fonction h. Pour plus de détails (ou pour des hypothèses de régularité plus faibles mais sans l'unicité), on pourra consulter les preuves du cas $N = 1$ dans [3, 6].

Rappelons pour finir que R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg avaient déjà remarqué dans [4] la possibilité de développer une théorie de Brunn-Minkowski pour les multihérissons (hypersurfaces pour lesquelles le nombre d'hyperplans tangents orthogonaux à une direction donnée est fini et constant pour un ouvert dense de directions). Ces multihérissons comprennent par exemple dans $\mathbb{R}^3$, les surfaces minimales complètes (branchées ou pas) de courbure totale finie [4, 9] ou les plongements tendus de surfaces (voir [2] pour les différentes caractérisations des immersions tendues).

Bibliographie

[1] V. I. ARNOLD, Topological Problems in Wave Propagation Theory and Topological Economy Principle in Algebraic Geometry. In: Proceedings in honour to V. I. Arnold for his 60th birthday, AMS Fields Inst. Com. **24**, 39–54 (1999).
[2] T. E. CECIL and P. J. RYAN, Tight and taut immersions of manifolds. Res. Notes Math. **107**, Boston-London-Melbourne 1985.
[3] M. KALLAY, Reconstruction of a plane convex body from the curvature of its boundary. Israel J. Math. **17**, 149–161 (1974).
[4] R. LANGEVIN, G. LEVITT et H. ROSENBERG, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss). Singularities, Banach Center Publ. **20**, 245–253 (1988).
[5] Y. MARTINEZ-MAURE, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons. Arch. Math. **72**, 444–453 (1999).
[6] Y. MARTINEZ-MAURE, Étude des différences de corps convexes plans. Ann. Polon. Math. **72**, 71–78 (1999).
[7] Y. MARTINEZ-MAURE, Indice d'un hérisson: étude et applications. Publ. Mat. **44**, 237–255 (2000).
[8] Y. MARTINEZ-MAURE, A fractal projective hedgehog. Demonstratio Math. **34**, 59–63 (2001).
[9] H. ROSENBERG et E. TOUBIANA, Complete minimal surfaces and minimal herissons. J. Differential Geom. **28**, 115–132 (1988).
[10] R. SCHNEIDER, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge 1993.

Received: 27 April 2001

Yves Martinez-Maure
1, rue Auguste Perret
F-92500 Rueil-Malmaison
France
martinez@esiea.fr